Uitwerking tentamen Golven & Optica 19/11/98

1. a) $M_1 \frac{d^2(L\theta)}{dt^2} + M_1 g \sin\theta = 0 \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$

$\theta \ll 1 \longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \longrightarrow \omega^2 = \frac{g}{L} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = 0.32\ \mathrm{Hz}$

b) $(M_1 + M_2 + M_3) L\ddot{\theta} + M_1 g\theta = 0 \qquad \ddot{\theta} + \frac{M_1}{(M_1+M_2+M_3)}\frac{g}{L}\theta = 0$

$\Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{M_1 g}{(M_1+M_2+M_3)L}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{3.10}{12.2.5}\right)^{\frac{1}{2}} = 0.16\ \mathrm{Hz}$

c) $(M_1 + M_3)L\ddot{\theta} + M_1 g\theta + k(x_1 - x_2) = 0 \qquad \theta \simeq \frac{x_1}{L}$

$\Rightarrow (M_1 + M_3)\ddot{x}_1 + M_1\frac{g}{L}x_1 + k(x_1 - x_2) = 0$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 + (a+b)x_1 - b x_2 = 0$ met $a = \frac{M_1}{M_1+M_3}\frac{g}{L} = 2.4\ \mathrm{s}^{-2}$

$b = \frac{k}{M_1+M_3} = 0.8\ \mathrm{s}^{-2}$

$M_2\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0$

$\ddot{x}_2 - \frac{k}{M_2}x_1 + \frac{k}{M_2}x_2 = 0 \qquad \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = 0$ met $c = \frac{k}{M_2} = 2\ \mathrm{s}^{-2}$

d) Met $x_1 = c_1\cos\omega t$ en $x_2 = c_2\cos\omega t$

$-\omega^2 c_1 + (a+b)c_1 - bc_2 = 0 \qquad c_1[-\omega^2 + a + b] + c_2[-b] = 0$

$-\omega^2 c_2 - cc_1 + c.c_2 = 0 \qquad c_1[-c] + c_2[-\omega^2 + c] = 0$

Eis vergelijkingen afhankelijk (determinant = 0)

$\Rightarrow (-\omega^2 + a + b)(-\omega^2 + c) - bc = 0$

$\omega^2 = p \qquad p^2 + p[-(a+b+c)] + c(a + \cancel{b} - \cancel{b}) = 0$

$p = \frac{1}{2}\left[a+b+c \pm \sqrt{(a+b+c)^2 - 4ac}\right] = \frac{1}{2}\left[2.4 + 0.8 + 2 \pm \sqrt{5.2^2 - 4.2.4.2}\right] =$

$= 2.6 \pm \frac{1}{2}\sqrt{7.84} = 2.6 \pm 1.4 = p_{1,2}$

$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{p_1} = 2\ \mathrm{rad/s} \longrightarrow \nu_1 = \frac{1}{2\pi}2 = 0.32\ \mathrm{Hz}$

$\omega_2 = \sqrt{p_2} = \sqrt{1.2}\ \mathrm{rad/s} \longrightarrow \nu_2 = 0.17\ \mathrm{Hz}$

2(a) TM : $H - H' = H''$

$$\Rightarrow \begin{cases} kE - k'E' = k''E'' \\ E\cos\theta + E'\cos\theta = E''\cos\varphi \end{cases}$$

Elimineer E'', gebruik $n = \frac{c}{u} = \frac{ck}{\omega}$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_1E - n_1E' = n_2E'' \\ \cos\theta(E+E') = \cos\varphi E'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n_1}{n_2}(E-E') = E'' \\ \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}(E+E') = E'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\right)E = \left(\frac{1}{n} + \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\right)E' \Rightarrow \boxed{r = \frac{E'}{E} = \frac{\cos\varphi - n\cos\theta}{\cos\varphi + n\cos\theta}}$$

$r = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = n\cos\theta$ (en $\cos\varphi \neq -n\cos\theta$)   Snel: $\sin\theta = n\sin\varphi$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-n^2\cos^2\theta} = \frac{1}{n}\sin\theta \Rightarrow 1 - n^2\cos^2\theta = \left(\frac{\sin\theta}{n}\right)^2$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta = \frac{n^2}{\cos^2\theta} - n^4 = n^2\left[\frac{1-n^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right] \quad \forall\,\theta.$$

$\Leftrightarrow \tan\theta = n$ en $\cancel{1-n^2\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} - n^2 = 1 \Leftrightarrow \tan^2\theta = n^2$.

$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta = n}$$

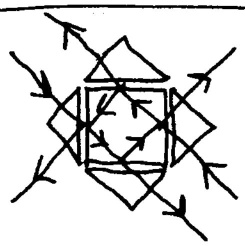
(b) $\theta_{cr} = 45° \Rightarrow \frac{1}{n} = \sin\theta_{cr} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow n = \sqrt{2} = 1.42 \Rightarrow$ glas.

(c)
$$\vec{k}''\cdot\vec{r} = k''x\sin\varphi - k''y\cos\varphi$$
$$= k''x\sin\varphi - k''y\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}}$$
$$= k''x\sin\varphi - ik''y\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2}-1}$$

$$e^{i\vec{k}''\cdot\vec{r}} = e^{-k''\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2}-1}\,|y| + ik''x\sin\varphi} = e^{-\alpha|y|}\,e^{ik_1x}$$

$$\alpha = k''\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2}-1} \qquad k_1 = \frac{k''x\sin\theta}{n}$$

(d)



(e) $E \sim e^{-\alpha|y|} = 1\ \%$

$$-\alpha|y| = -\ln 100$$
$$a = \frac{\ln 100}{\alpha}$$

$$\alpha = k''\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n^2}-1} = \frac{2\pi}{628\cdot10^{-9}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot(1.45)^2-1} = 2.26\cdot10^{6}$$

$$a = \frac{\ln 100}{2.26\cdot10^{6}} \approx 2.03\cdot10^{-6}\ \text{m}$$

3a) Twee redenen:

① In de voorfactoren hebben d_1 en d_2 een gemeenschappelijke grootte x; bijdragen als gevolg van h en y zijn hierop kleine correctiefactoren. Echter in de complexe e-machten is de <u>relatieve</u> fase van het licht afkomstig van S_1 en S_2 van belang; de gemeenschappelijke term x valt weg in het berekenen van de relatieve fase (aftrekken), ~~zodat~~ waardoor de verschillen in d_2 en d_1 belangrijk worden.

② In de complexe e-machten hebben d_1 en d_2 een vermenigvuldigingsfactor $k = 2\pi/\lambda$. Daardoor hebben variaties van d_1 en d_2 op golflengteschaal (= minder dan een micrometer voor zichtbaar licht) al een cruciale invloed in de e-machten, maar <u>niet</u> in de voorfactoren U_1/d_1 en U_2/d_2.

b) $$I = |U|^2 = U \cdot U^* = \left(\frac{U_1}{x} e^{+i(kd_1-\omega t)} + \frac{U_2}{x} e^{+i(kd_2-\omega t)}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{U_1}{x} e^{-i(kd_1-\omega t)} + \frac{U_2}{x} e^{-i(kd_2-\omega t)}\right) =$$
$$= \frac{1}{x^2}\left[U_1^2 + U_2^2 + U_1 U_2 \left\{e^{ik(d_2-d_1)} + e^{-ik(d_2-d_1)}\right\}\right]$$
$$= \frac{1}{x^2}\left[U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos k(d_2-d_1)\right]$$

c) $$d_2 - d_1 = \left[x^2 + \left(y+\frac{h}{2}\right)^2\right]^{1/2} - \left[x^2 + \left(y-\frac{h}{2}\right)^2\right]^{1/2} =$$
$$= x\left[1 + \frac{y^2+h^2/4}{x^2} + \frac{yh}{x^2}\right]^{1/2} - x\left[1 + \frac{y^2+h^2/4}{x^2} - \frac{yh}{x^2}\right]^{1/2} \underset{\{\sqrt{1+\Delta} \approx 1+\frac{1}{2}\Delta\}}{\approx} \frac{yh}{x}$$

d) Regelmatig cosinuspatroon dat de afwisseling beschrijft tussen

<u>constructieve</u> interferentie: $I = I_{max} = \frac{1}{x^2}(U_1+U_2)^2$ en

<u>destructieve</u> interferentie: $I = I_{min} = \frac{1}{x^2}(U_1-U_2)^2$

e) $U_1 = U_2 \Rightarrow I_{min} = 0 \Rightarrow V = 1$; $U_1 = 7U_2 \Rightarrow V = \dfrac{(7+1)^2-(7-1)^2}{(7+1)^2+(7-1)^2} = \dfrac{28}{100} = 0.28$